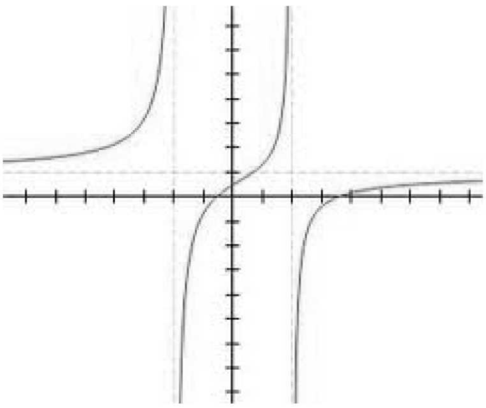
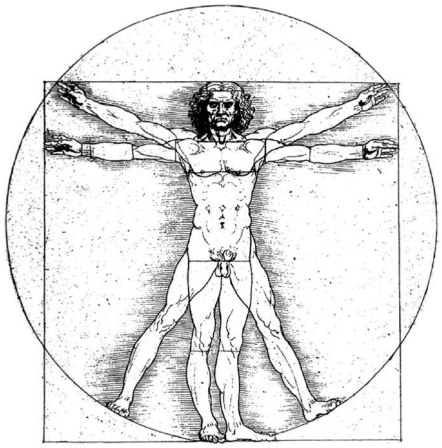
Mathymates





LA POBLACIÓN MUNDIAL
EN EL SIGLO XXI

LA POBLACIÓN MUNDIAL
EN EL SIGLO XXI

Tenemos un problema:

En el año 1.969 la población mundial era de 3.000 millones, en 1.999 se duplicó a 6.000 millones y durante 2.011 se rebasará la cifra de los 7.000 millones. Pero, ¿cuántos millones habrá en el año 2.050? ¿Y, cuántos al finalizar el siglo? Vamos a intentar responder a estas preguntas después de echar algunas cuentecillas…

Cuando hablamos del futuro, podemos pensar que todo son conjeturas, pero puede suceder que esas conjeturas sean bastante probables y ya el pionero en la teoría de la probabilidad, Bernoulli, tituló su obra maestra *Ars Conjectandi* (el arte de la conjetura).

Al final, tras ver la "posible o probable" gráfica de la población durante este siglo, llegaremos a una conclusión: "*Houston, Houston, we have a problem*". Porque lo cierto es que durante este siglo XXI habrá una explosión demográfica sin precedentes, con el mayor crecimiento cuantitativo de toda la historia, superándose la cifra de 15.000 millones de habitantes. En todo caso, la superpoblación comenzará en torno a 2.050 cuando se superen los 10.000 millones, y será uno de los mayores problemas con los que la humanidad se haya enfrentado.

Pero vayamos más despacio: muchas veces para indicar que hay un crecimiento muy rápido decimos que crece geométricamente o bien, de forma exponencial. Sin embargo, en la naturaleza, el crecimiento exponencial ocurre sólo en circunstancias especiales y durante un corto periodo de tiempo, y después de un periodo de crecimiento exponencial, las poblaciones tienden a estabilizarse al tamaño máximo o debajo de él, en un punto con capacidad de sostenimiento que sigue un modelo matemático llamado crecimiento logístico.

En sentido inverso, o sea, decrecimiento exponencial, sí que podemos encontrar ejemplos en la naturaleza, las sustancias radiactivas siguen una ley exponencial decreciente en su ritmo de desintegración, por ejemplo, el carbono 14 tiene un periodo de semidesintegración de 5370 años, es decir, al morir un ser vivo, comienza a disminuir la proporción de carbono 14, y se reduce a la mitad en ese número de años. En el cuerpo momificado del faraón egipcio Ramsés II se midió la proporción de carbono 14 y se detectó que ésta se había reducido hasta el 67.7056% aproximadamente del que normalmente hay en los seres vivos.

La función asociada a esta situación es una función exponencial decreciente: $C = C_0 \cdot e^{-kt}$. Siendo C la cantidad final de carbono 14, C_0 la cantidad inicial, t el número de años y k una constante que depende del periodo de semidesintegración.

Calculemos primero el valor de k:

$$0{,}5 \cdot C_0 = C_0 \cdot e^{-k \cdot t} \Rightarrow 0{,}5 = e^{-k \cdot 5370} \Rightarrow \ln(0{,}5) = -k \cdot 5370 \Rightarrow \frac{\ln(0{,}5)}{5370} = -k$$

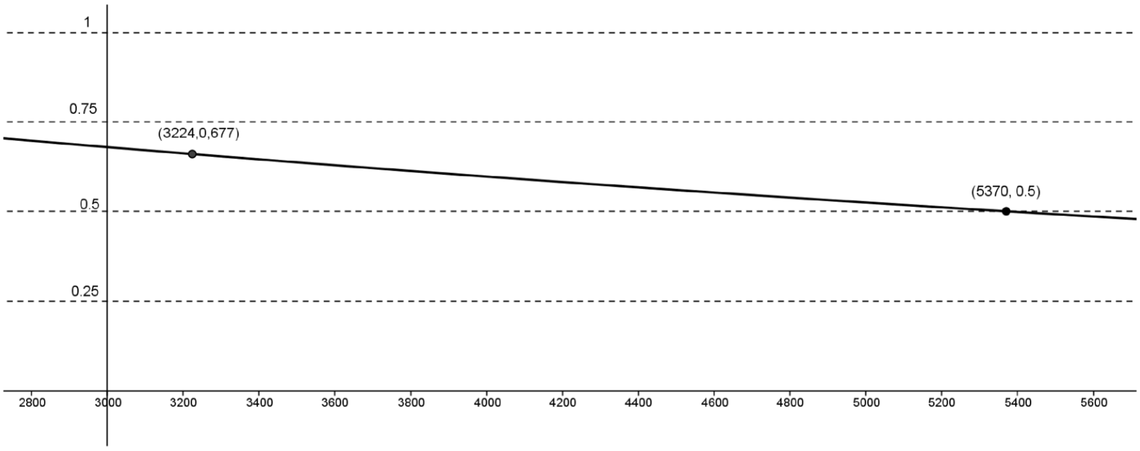
$$-k = \frac{-0{,}69314718055994530941723212145818}{5370} \Rightarrow k = 0{,}0001209680830664$$

Ahora que conocemos el valor de k podemos averiguar aproximadamente cuando murió el faraón Ramsés II:

$$C = C_0 \cdot e^{-kt} \Rightarrow 0{,}677056 \cdot C_0 = C_0 \cdot e^{-0{,}0001209680830664 \cdot t} \Rightarrow 0{,}677056 = e^{-0{,}0001209680830664 \cdot t}$$

$$\ln(0{,}677056) = -0{,}0001209680830664 \cdot t \Rightarrow \frac{\ln(0{,}677056)}{-0{,}0001209680830664} = t$$

$$t = \frac{-0{,}3900012916178276}{-0{,}0001209680830664} = 3224 \text{ años}$$



Crecimiento exponencial y crecimiento logístico:

Sea P(t) la población que varía en función del tiempo t.

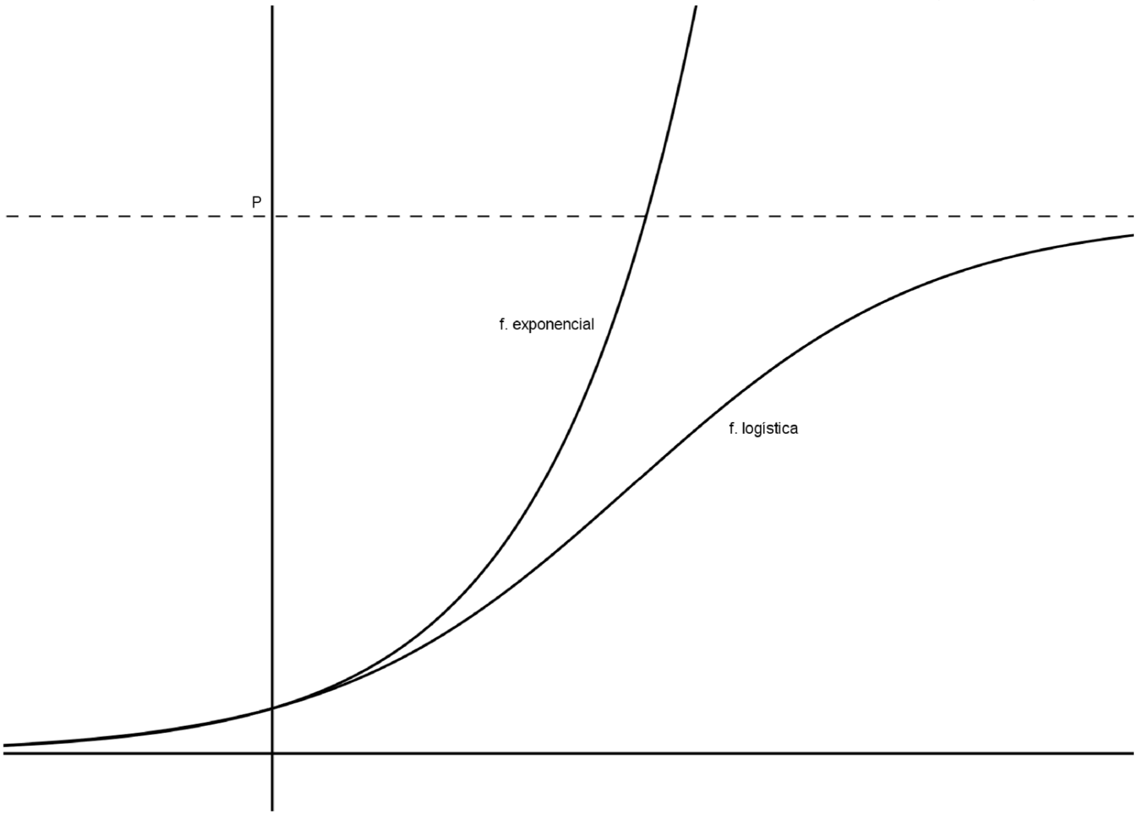
r el % de crecimiento, que escrito en tanto por 1 será: $i = \frac{r}{100}$.

Y P_0 la población inicial.

El crecimiento exponencial viene dado por la expresión: $P(t) = P_0 \cdot (1+i)^t$ o bien

$P(t) = P_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$. Y expresando esta función a partir de otra exponencial de base e,

sería: $P(t) = P_0 \cdot e^{t \cdot \ln\left(1+\frac{r}{100}\right)} = P_0 \cdot e^{at}$. Es decir, $\boxed{P(t) = P_0 \cdot e^{at}}$. Siendo $a = \ln\left(1 + \frac{r}{100}\right)$.



Supongamos ahora que el crecimiento exponencial no es posible por las limitaciones o restricciones propias de la naturaleza y sea P la población máxima estimada.

El crecimiento logístico tiene que venir dado por una función continua, siempre positiva, con asíntotas horizontales y=0 en $-\infty$ e y=P en $+\infty$. Esto se consigue por ejemplo con la función $P(t)=\dfrac{P}{1+e^{-t}}$, y de forma más general con: $P(t)=\dfrac{P}{1+K\cdot e^{-at}}$.

$$\begin{cases} P(0)=P_0 \text{ inicial} \\ P(0)=\dfrac{P}{1+K} \end{cases} \Rightarrow P_0=\frac{P}{1+K} \Rightarrow P_0+P_0\cdot K=P \Rightarrow K=\frac{P-P_0}{P_0}=\frac{P}{P_0}-1.$$

Luego: $\boxed{P(t)=\dfrac{P}{1+\left(\dfrac{P}{P_0}-1\right)\cdot e^{-at}}}$ Siendo igual que antes: $a=\ln\left(1+\dfrac{r}{100}\right)$

Tenemos ahora que: $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{P}{1+\left(\dfrac{P}{P_0}-1\right)\cdot e^{-at}}=\dfrac{P}{1+\left(\dfrac{P}{P_0}-1\right)\cdot 0}=P$, y además:

$$\lim_{t\to-\infty} P(t)=\lim_{t\to-\infty}\frac{P}{1+\left(\dfrac{P}{P_0}-1\right)\cdot e^{-at}}=\frac{P}{1+\left(\dfrac{P}{P_0}-1\right)\cdot\infty}=0.$$

Es una función continua y positiva en la que el denominador decrece exponencialmente (según el crecimiento de la población) y por tanto, al disminuir el denominador, la fracción aumentará desde 0 hasta P.

Ejemplo: en una finca hay 50 conejos creciendo al 5% mensual durante 100 meses.

$P_0=50$, $i=\dfrac{5}{100}=0{,}05$, $t=100$ y $a=\ln(1{,}05)=0{,}04879...$

Según el crecimiento exponencial: $P(100)=50\cdot(1+0{,}05)^{100}=50\cdot e^{4{,}879...}=6575$ conejos.

Pero no hace falta ser un lince para darse cuenta que los conejos no pueden crecer indefinidamente: por los depredadores, falta de comida, enfermedades, etc. Y se estima que en la finca en cuestión, la población máxima es aproximadamente de 4000 conejos.

$P=4000$, $P_0=50$, $t=100$ y $a=\ln(1{,}05)=0{,}04879...$

Según el crecimiento logístico habrá bastantes menos:

$$P(t)=\frac{P}{1+\left(\dfrac{P}{P_0}-1\right)\cdot e^{-at}} \Rightarrow P(100)=\frac{4000}{1+(80-1)\cdot e^{-4{,}879...}}\cong 2499 \text{ conejos.}$$

<u>Gráfica de la población mundial:</u>

La población se duplicó desde 1.969 a 1.999 pasando de 3.000 a 6.000 millones, ¿cuál fue la tasa de crecimiento?

Los expertos afirman que la población máxima admisible es de 36.000 millones.

$P=36000$, $P_0=3000$, $t=30$ y $P(30)=6000$. Hay que calcular r.

$$P(t)=\frac{P}{1+\left(\dfrac{P}{P_0}-1\right)\cdot e^{-at}} \Rightarrow P(30)=\frac{36000}{1+\left(\dfrac{36000}{3000}-1\right)\cdot e^{-a\cdot 30}} \Rightarrow 6000=\frac{36000}{1+(12-1)\cdot e^{-30\cdot a}}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{6}{1+11 \cdot e^{-30 \cdot a}} \Rightarrow 1+11 \cdot e^{-30 \cdot a} = 6 \Rightarrow 11 \cdot e^{-30 \cdot a} = 5 \Rightarrow e^{-30 \cdot a} = \frac{5}{11} \Rightarrow -30 \cdot a = \ln\left(\frac{5}{11}\right)$$

$$\Rightarrow a = \frac{-0{,}78845736}{-30} = 0{,}0262819$$

Como $a = \ln\left(1+\frac{r}{100}\right) \Rightarrow e^{a} = 1+\frac{r}{100} \Rightarrow r = 100 \cdot \left(e^{a} - 1\right) \Rightarrow r = 2{,}6630327\ \%$

Puede parecer un porcentaje de crecimiento pequeño para que la población se duplique, pero en realidad cualquier porcentaje de crecimiento superior al 2% es considerado como bastante elevado.

¿Cuál será el porcentaje de crecimiento medio durante el siglo XXI? Es difícil responder esta pregunta, en los países desarrollados es inferior al 2% y en los países en vías de desarrollo es superior al 2%, pero si queremos que el porcentaje medio sea consecuente con el dato de población de 1.999 (6.000 millones) y con el dato de población para 2.011 dónde se superará por primera vez la cifra de 7.000 millones, tendremos un crecimiento aproximado del 1,6%:

$P = 36000$, $P_0 = 6000$, $t = 12$ y $P(12) = 7000$. Hay que calcular r.

$$P(t) = \frac{P}{1+\left(\frac{P}{P_0} - 1\right) \cdot e^{-at}} \Rightarrow P(12) = \frac{36000}{1+\left(\frac{36000}{6000} - 1\right) \cdot e^{-a \cdot 12}} \Rightarrow 7000 = \frac{36000}{1+\left(6-1\right) \cdot e^{-12 \cdot a}}$$

$$\Rightarrow 7 = \frac{36}{1+5 \cdot e^{-12 \cdot a}} \Rightarrow 7+35 \cdot e^{-12 \cdot a} = 36 \Rightarrow 35 \cdot e^{-12 \cdot a} = 29 \Rightarrow e^{-12 \cdot a} = \frac{29}{35} \Rightarrow -12 \cdot a = \ln\left(\frac{29}{35}\right)$$

$\Rightarrow a = \frac{-0{,}1880522}{-12} = 0{,}0156710$. Igual que antes: $r = 100 \cdot \left(e^{a} - 1\right) = 1{,}5794453\,\%$